Lógica Proposicional

Elisabete Freire

Departamento de Matemática
Universidade dos Açores

Lógica Proposicional

Em lógica clássica existem duas alternativas para a definição de uma linguagem:

- Lógica Proposicional,
- Lógica de Primeira Ordem.

Lógica Proposicional - baseada em proposições.

- Proposições são frases declarativas que fazem afirmações sobre qualquer coisa.

Linguagem da Lógica Proposicional

Alfabeto

- Símbolos de pontuação: (,).
- Símbolos lógicos: $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\rightarrow$ (implicação).
- Símbolos de predicado: P,Q,R,... ou p,q,r,... (proposições)

Frases da linguagem (*fbfs*)

1. Os símbolos de predicado são *fbfs*.
2. Se α é uma *fbf* então $(\neg\alpha)$ é uma *fbf*.
3. Se α e β são *fbfs* então $(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta)$ são *fbfs*.
4. Nada mais é uma *fbf*.

Escrita simplificada

Ordem de prioridade dos operadores

1. $\neg$
2. $\wedge, \vee$
3. $\rightarrow$

Propriedades

- $\wedge, \vee$ são operações associativas à esquerda;
- $\rightarrow$ é associativa à direita.

Sempre que possível os parêntesis redundantes são omitidos.

Exemplo

$(p \wedge q) \vee (r \rightarrow (p \rightarrow q))$ pode ser simplificado para $p \wedge q \vee (r \rightarrow p \rightarrow q)$.

Gramática

Gramática na BNF(Backus Naur Form)

Uma fórmula f (*fbf*) da lógica proposicional é gerada por

$$f ::= p|(\neg f)|(f \wedge f)|(f \vee f)|(f \rightarrow f)$$

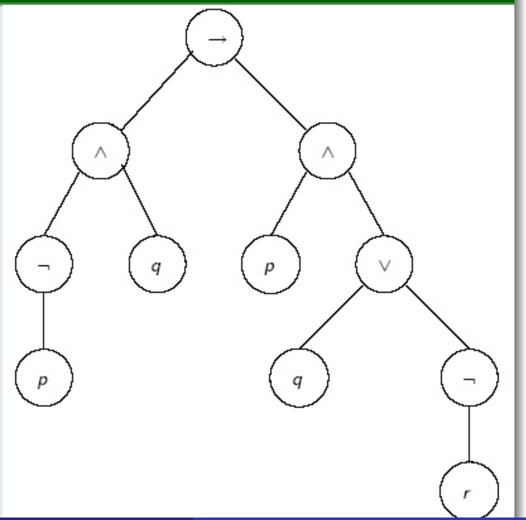
onde p é uma proposição.

Árvores de parsing para *fbfs*

Cada fórmula construída de acordo com a gramática pode ser representada por uma única árvore de parsing.

Exemplo

$(((\neg p) \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee (\neg r))))$



Nota
Em notação prefixa:

$(\rightarrow (\wedge(\neg p)q)(\wedge p(\vee q(\neg r))))$

Sistema dedutivo

Regras de inferência

Permitem inferir novas *fbfs* a partir de *fbfs* existentes. Tipicamente, em sistemas de dedução natural existem duas regras de inferência por cada símbolo lógico $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$:

1. **Regra de introdução**
2. **Regra de eliminação**

Prova

Sequência numerada de *fbfs*, em que cada *fbf* ou é uma premissa ou resulta da aplicação de uma regra de inferência que utiliza *fbfs* anteriores.
Objectivo:

$$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$$

(premissas $\vdash$ conclusão)

Introdução da conjunção

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}\ I\wedge$$

Exemplo

$$(P, Q \vdash P \wedge Q)$$

Eliminação da conjunção

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\; E_1 \wedge$$
$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\; E_2 \wedge$$

Exemplo

$$(P \wedge Q \vdash P) \text{ e } (P \wedge Q \vdash P)$$

Exercício

Prove que

$$(p \wedge q, r \vdash q \wedge r)$$

Provas hipotéticas

Provas hipotética

É uma prova iniciada com a introdução de uma hipótese.

- Uma prova hipotética cria um ambiente onde se assume que a hipótese é verdadeira.
- Este ambiente vai ser representado por uma caixa.

Introdução da implicação

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\alpha \\ \vdots \\ \beta\end{array}}}{\alpha \rightarrow \beta}\; I \rightarrow$$

Exemplo

$$(P \vdash Q \rightarrow (P \wedge Q))$$

Eliminação da implicação (modus ponens)

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}\; E \rightarrow$$

Exemplo

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

Regra da repetição

$$\frac{\alpha}{\alpha} \quad Rep_1$$

$$\frac{\alpha}{\boxed{\alpha}} \quad Rep_2$$

Exemplo

$$(P \vdash Q \rightarrow P)$$

Introdução da negação

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\alpha \\ \vdots \\ \beta \\ \neg\beta\end{array}}}{\neg\alpha} \quad I\neg$$

Exemplo

$$(P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P)$$

Eliminação da negação

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha} \quad E\neg$$

Exemplo

$$(\neg P \vdash P \rightarrow Q)$$

Introdução da disjunção

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad I_1 \vee$$

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} \quad I_2 \vee$$

Eliminação da disjunção

$$\dfrac{\alpha \vee \beta \quad \boxed{\begin{array}{c}\alpha\\ \vdots\\ \phi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\beta\\ \vdots\\ \phi\end{array}}}{\phi}\ E\vee$$

Exemplo

$$(P \vee Q \vdash Q \vee P)$$

Diminuir o número de linhas da prova

Um teorema é uma *fbf* que pode ser inferida sem o uso de premissas.

Exemplo

$$P \to P$$

$$(q \to r) \to ((\neg p \to \neg q) \to (p \to r))$$

Quando usamos teoremas podemos omitir a sua prova, introduzindo apenas uma linha com a *fbf* correspondente e justificando-a como um teorema.

(...)

Ponto da situação

Numa prova as *fbfs* são:

- premissas
- teoremas
- resultado da aplicação de regras de inferência

Regras de inferência são

- regras associadas aos símbolos lógicos
- regras de inferência derivadas

Novo símbolos

Símbolos lógicos tradicionais: $\vee, \wedge, \neg, \to$
Mas são suficientes os símbolos $\neg$ e $\to$

Exercício

Definir $\wedge$ e $\vee$ à custa de $\neg$ e $\to$.

Outro símbolo lógico: equivalência ($\leftrightarrow$)
Se α e β são *fbfs* então $\alpha \leftrightarrow \beta$ é *fbf*.

$$\alpha \leftrightarrow \beta \stackrel{def}{=} (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$$

Introdução e eliminação da equivalência

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \leftrightarrow \beta} \; I \leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \; E_1 \leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \rightarrow \alpha} \; E_2 \leftrightarrow$$

Sugestões para construir as provas

Fórmula	Técnica a utilizar
$\alpha \rightarrow \beta$	prova hipotética introduzindo como hipótese α e tentando derivar β
$\alpha \wedge \beta$	tentar provar separadamente α e β
$\alpha \vee \beta$	tentar provar uma das *fbf* α ou β
$\neg\alpha$	utilizar as *fbfs* existentes na prova para derivar directamente $\neg\alpha$ ou utilizar uma prova hipotética com a hipótese α para tentar chegar a uma contradição
P	tentar aplicações de regras que introduzem esse predicado P ou tentar prova por absurdo: usando uma prova hipotética iniciada com a negação do predicado, e tentando derivar uma contradição dentro dessa prova hipotética. Ou ainda, usar raciocínio por casos a partir de disjunções.

Propriedades do sistema dedutivo

- **Teorema da dedução**: se Δ é um conjunto de *fbfs*, α e β são *fbfs* e $(\Delta \cup \alpha) \vdash \beta$ então $\Delta \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$.
- **Transitividade de $\vdash$**: se Δ é um conjunto de *fbfs*, $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são *fbfs* e $\Delta \vdash \alpha_1, ..., \Delta \vdash \alpha_n$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n \vdash \beta$, então $\Delta \vdash \beta$.
- Para qualquer conjunto de *fbfs* Δ, o conjunto $Th(\Delta)$ é **infinito**.
- **Monotonicidade**: se Δ_1 e Δ_2 são conjuntos de *fbfs* e $\Delta_1 \subset \Delta_2$ então $Th(\Delta_1) \subset Th(\Delta_2)$.
- **Ponto fixo**: se Δ é um conjunto de *fbfs*, então $Th(\Delta) = Th(Th(\Delta))$.

Nota: $Th(\Delta) = \{\alpha : \Delta \vdash \alpha\}$

Sistema semântico: significado

Seja $\mathcal{V}$ uma função de valoração (ou interpretação) para lógica proposicional (LP) que faz corresponder a cada *fbf* o valor Verdadeiro (V) ou Falso (F).

$$\mathcal{V} : \mathcal{L}_{LP} \mapsto \{V, F\}$$

Dada uma *fbf* α e uma função de valoração $\mathcal{V}$, diz-se que $\mathcal{V}$ satisfaz α sse $\mathcal{V}(\alpha) = V$ caso contrário diz-se que ν não satisfaz α.
Para os **símbolos de predicado** a função de valoração é uma **associação entre predicados e valores lógicos** (V e F).
Para os **símbolos lógicos** consideramos as tabelas de verdade correspondentes e obtemos o resultado de $\mathcal{V}$ por composição.

Tabelas de verdade

α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

α	β	$\alpha \vee \beta$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

Exercício

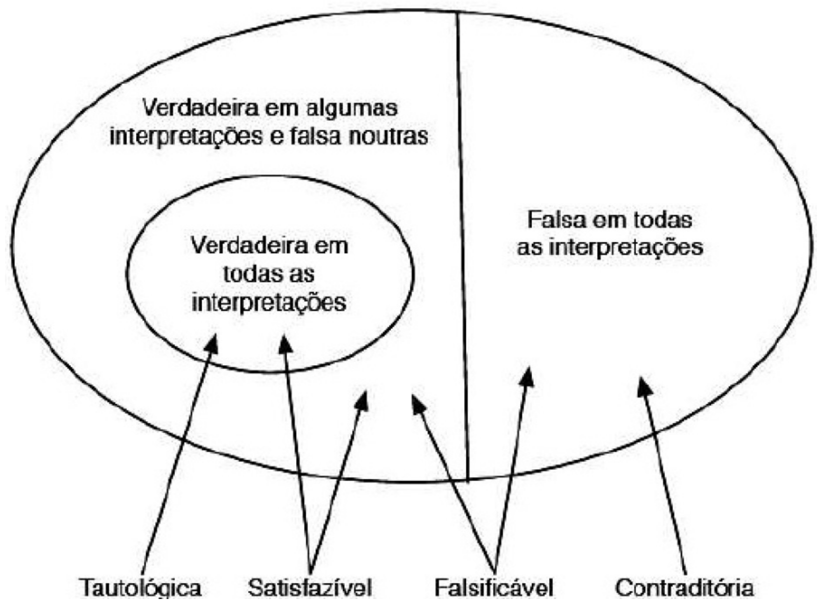
$$(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$$

Nota: A dimensão da tabela de verdade cresce exponencialmente em função do número de predicados.

Sistema semântico: classificação de *fbf*

- Tautológicas: verdadeiras para todas as interpretações
- Satisfazíveis: existe pelo menos uma interpretação na qual a *fbf* é verdadeira
- Falsificável: existe pelo menos uma interpretação na qual a *fbf* é falsa
- Contraditórias (ou n ao satisfazíveis): falsas para todas as interpretações

Sistema semântico: classificação de *fbf*



Formas Normais

Formas normais são formas sob as quais as fórmulas adquirem uma estrutura mais regular, tornando a sua manipulação mais eficiente.

Designa-se por **literal** todo o símbolo proposicional ou sua negação.

Forma Normal Conjuntiva para o cálculo proposicional (CP)

Uma *fbf* diz-se estar sob a forma normal conjuntiva (FNC) se for uma conjunção de disjunções de literais.
(Também se denota por CNF do inglês Conjuntive Normal Form)

Toda a *fbf* da lógica proposicional admite uma fórmula na FNC que lhe é logicamente equivalente.

Conversão para a FNC (ou CNF)

As seguintes equivalências fornecem (quando aplicadas da esquerda para a direita) um algoritmo de reescrita

$(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$	eliminação de $\leftrightarrow$
$(\alpha \rightarrow \beta) \equiv \neg\alpha \vee \beta$	eliminação de $\rightarrow$
$\neg(\alpha \wedge \beta) = \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \vee \beta) = \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$	leis de DeMorgan
$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$	eliminação de dupla $\neg$
$\phi \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv (\phi \vee \alpha) \wedge (\phi \vee \beta)$ $(\alpha \wedge \beta) \vee \phi \equiv (\alpha \vee \phi) \wedge (\beta \vee \phi)$	distribuição de $\vee$
$(\ldots \equiv \ldots$	outras equiv. conhecidas.)

Forma Normal Conjuntiva

- Exemplos
  $\neg P$
  $\neg P \wedge P$
  $P \vee \neg Q$
  $P \wedge (\neg Q \vee P \vee \neg R) \wedge S$
- Contra-exemplos
  $(P \vee Q) \vee R$
  $\neg(P \vee Q)$

Exercício

Converta a seguinte *fbf* à FNC

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

Forma Clausal

Cláusula

Uma cláusula é um conjunto de literais (o conjunto denota a sua disjunção).

A cláusula $\{p2, \neg p1, \neg p3\}$ denota $(p2 \vee \neg p1 \vee \neg p3)$

Notação

Dada uma cláusula C, seja P o conjunto dos símbolos não negados e N o conjunto dos símbolos negados. É habitual escrever C sob a forma $P \leftarrow N$.

Exemplo

$p2 \leftarrow p1, p3$	denota	$(p2 \vee \neg p1 \vee \neg p3)$
$p1 \leftarrow p3$	denota	$(p1 \vee \neg p3)$
$\leftarrow p2$	denota	$(\neg p2)$

Forma Clausal

- Uma cláusula $P \leftarrow N$ também pode ser vista como denotando uma implicação - **a conjunção de N implica a disjunção de P**.
  Exemplo: $p2 \leftarrow p1, p3$ denota $(p1 \wedge p3) \rightarrow p2$
- Convenciona-se que a conjunção de $\emptyset$ é V e a disjunção de $\emptyset$ é $\perp$.
- Uma cláusula unitária é uma clausula que têm exactamente um literal.
- O conjunto vazio representa a **cláusula vazia**. Uma cláusula vazia é não satisfazível.
- Um conjunto de cláusulas vazio é satisfeito seja qual for a função de valoração.

Toda a fórmula do CP admite um conjunto de claúsulas logicamente equivalente, i.e., tal que a conjunção das disjunções denotadas pelas cláusulas é logicamente equivalente à fórmula inicial.

(É imediato dos resultados anteriores.)

Forma Clausal

Seja w uma fórmula. A determinação do conjunto $C(w)$ das cláusulas que a representam pode ser feita por aplicação sucessiva das seguintes regras à representação inicial ($w \leftarrow$):

$$
\begin{array}{lll}
\neg & (W1, \neg w \rightarrow W2) & \equiv (W1 \leftarrow W2, w) \\
 & (W1 \leftarrow W2, \neg w) & \equiv (W1, w \leftarrow W2) \\
\vee & (W1, (w1 \vee w2) \leftarrow W2) & \equiv (W1, w1, w2 \leftarrow W2) \\
 & (W1 \leftarrow W2, (w1 \vee w2)) & \equiv (W1 \leftarrow W2, w1), (W1 \leftarrow W2, w2) \\
\wedge & (W1, (w1 \wedge w2) \leftarrow W2) & \equiv (W1, w1 \leftarrow W2), (W1, w2 \leftarrow W2) \\
 & (W1 \leftarrow W2, (w1 \wedge w2)) & \equiv (W1 \leftarrow W2, w1, w2) \\
\rightarrow & (W1, (w1 \rightarrow w2) \leftarrow W2) & \equiv (W1, w2 \leftarrow W2, w1) \\
 & (W1 \leftarrow W2, (w1 \rightarrow w2)) & \equiv (W1, w1 \leftarrow W2), (W1 \leftarrow W2, w2) \\
\leftrightarrow & (W1, (w1 \leftrightarrow w2) \leftarrow W2) & \equiv (W1, (w1 \rightarrow w2) \leftarrow W2), \\
 & & \quad (W1, (w2 \rightarrow w1) \leftarrow W2) \\
 & (W1 \leftarrow W2, (w1 \leftrightarrow w2)) & \equiv (W1 \leftarrow W2, (w1 \rightarrow w2), (w2 \rightarrow w1))
\end{array}
$$

Exemplo

$q \rightarrow (p \rightarrow (p \wedge q))$

1. $q \rightarrow (p \rightarrow (p \wedge q)) \leftarrow$
2. $(p \rightarrow (p \wedge q)) \leftarrow q$ por $\rightarrow$ esq.
3. $(p \wedge q) \leftarrow q, p$ por $\rightarrow$ esq.
4. $p \leftarrow q, p$ por $\wedge$ esq.
   $q \leftarrow q, p$

As transformações preservam equivalência lógica e garante-se a terminação do procedimento (as transformações (1-4) diminuem o número de conectivos que ocorrem em C(w); por outro lado, as transformações 5 substituem um conectivo por outros aos quais se aplicam apenas as regras (1-4).)